

Resumen de cónicas
Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría. Curso 2012/2013. Grupo B.

PARÁBOLA
<p>Definición:</p> <p>Una <i>parábola</i> es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo P, llamado <i>foco</i>, y una recta r, llamada <i>directriz</i>, que no pasa por P.</p>
<p>Elementos geométricos:</p> <ul style="list-style-type: none">■ Llamamos <i>eje</i> a la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.■ Llamamos <i>vértice</i> al punto de corte del eje con la parábola (es el punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz, y está en el eje).
<p>Propiedades:</p> <ul style="list-style-type: none">■ Simetría: La parábola es simétrica con respecto a su eje.■ Reflectora: Sea Q un punto de la parábola. La recta tangente a la parábola en el punto Q forma ángulos iguales con la recta paralela al eje que pasa por Q y la recta que pasa por Q y el foco P.
<p>Ecuación de la parábola:</p> <ul style="list-style-type: none">■ Si $r \equiv y = a$ (directriz horizontal) y $P = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq a$:$y = \frac{(x - x_0)^2}{2(y_0 - a)} + \frac{y_0 + a}{2}$■ Si $r \equiv x = a$ (directriz vertical) y $P = (x_0, y_0)$, con $x_0 \neq a$:$x = \frac{(y - y_0)^2}{2(x_0 - a)} + \frac{x_0 + a}{2}$

ELIPSE

Definición:

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que cumplen que la suma de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos P_1 y P_2 , llamados *focos*, es constante $2R$, siendo $2R > \text{dist}(P_1, P_2)$.

Elementos geométricos:

- Llamamos *vértices* a los puntos de corte V_1, V_2 de la elipse con la recta que pasa por P_1, P_2 .
- Llamamos *centro* al punto medio de los focos (o de los vértices).
- Llamamos *eje mayor* al segmento que une los vértices.
- Llamamos *eje menor* al segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y une dos puntos de la elipse.
- Llamamos *distancia focal* a la distancia entre los focos.

Propiedades:

- **Simetría:** La elipse es simétrica con respecto a sus ejes mayor y menor.
- **Reflectora:** Sea Q un punto de la elipse. La recta tangente a la elipse en Q forma ángulos iguales con las rectas que pasan por Q y por cada uno de los focos de la elipse.

Ecuación de la elipse:

Sean $C = (x_0, y_0)$ el centro de la elipse, $R = \text{dist}(V_1, C)$, $\mu = \text{dist}(P_1, C)$ y $\lambda^2 = R^2 - \mu^2$.

- Si el eje mayor es horizontal:
$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\lambda^2} = 1 .$$
- Si el eje mayor es vertical:
$$\frac{(y - y_0)^2}{R^2} + \frac{(x - x_0)^2}{\lambda^2} = 1 .$$

HIPÉRBOLA

Definición:

Una *hipérbola* es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que cumplen que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos P_1 y P_2 , llamados *focos*, es constante $2R$, siendo $2R < \text{dist}(P_1, P_2)$.

Elementos geométricos:

- Llamamos *vértices* a los puntos de corte V_1, V_2 de la hipérbola con la recta que pasa por los focos.
- Llamamos *centro* al punto medio de los focos (o de los vértices).
- Llamamos *eje transversal* al segmento que une los vértices.

Propiedades:

- **Simetría:** La hipérbola es simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje transversal y con respecto a la recta ortogonal a su eje transversal y que pasa por el centro de la hipérbola.
- **Reflectora:** Sea Q un punto de la hipérbola. La recta tangente a la hipérbola en Q forma ángulos iguales con las rectas que pasan por Q y por cada uno de los focos de la hipérbola.

Ecuación de la hipérbola:

Sean $C = (x_0, y_0)$ el centro de la hipérbola, $R = \text{dist}(V_1, C)$, $\mu = \text{dist}(P_1, C)$ y $\lambda^2 = \mu^2 - R^2$.

- Si el eje transversal es horizontal:
$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} - \frac{(y - y_0)^2}{\lambda^2} = 1 .$$
- Si el eje transversal es vertical:
$$\frac{(y - y_0)^2}{R^2} - \frac{(x - x_0)^2}{\lambda^2} = 1 .$$

CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS

Ecuación general:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Equivalentemente,

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Consideramos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \quad y \quad N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Clasificación:

1. Si $|M| = 0$, la ecuación no define ninguna cónica (caso degenerado).
2. Si $|M| \neq 0$, entonces:
 - $|N| = 0 \Rightarrow$ **parábola**
 - $|N| < 0 \Rightarrow$ **hipérbola**
 - $|N| > 0$ y $|M|$ tiene signo opuesto al de $A + C \Rightarrow$ **elipse**
 - $|N| > 0$ y $|M|$ tiene el signo de $A + C \Rightarrow$ no hay puntos que cumplan la ecuación